I Exercices

1 Dérivabilité

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé

1. $f(x) = x^2$ en $x = 3$ (Revenir à la définition du nombre dérivé)
2. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$.
4. $f(x) = |x|$ en $x = 0$.
5. $f(x) = x\sqrt{x}$ en $x = 0$.
6. $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$ en $x = -1$.
7. $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$ en $x = 1$. (*plus difficile*)

Aide
Réponses

2 Calculs de fonctions dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.
C'est un exercice d'entraînement au calcul, on ne demande pas de déterminer les ensembles sur lesquels les fonctions sont dérivables.

1. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7$.
2. $f(x) = \dfrac{4x-1}{7x+2}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$.
4. $f(x) = 6\sqrt{x}$.
5. $f(x) = 4\sin x + \cos(2x)$.
6. $f(x) = \cos(-2x+5)$.
7. $f(x) = \sin x^2$.
8. $f(x) = \sin^2 x$. (Que l'on peut aussi noter $(\sin x)^2$)
9. $f(x) = \tan x$.
10. $f(x) = (2x-5)^4$. (Développement déconseillé)
11. $f(x) = \dfrac{7}{x^2-9}$.
12. $f(x) = \sqrt{4x^2-3}$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.
14. $f(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+2}\right)^3$.

Aide
Réponses

3 Sens de variation d'une fonction

Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble indiqué. (Les limites ne sont pas demandées).

1. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x-5}{x+2}$ sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

Remarque : Il y a davantage d'études de fonctions dans le chapitre dédié.

Aide

Réponses

4 Équation de tangente

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point demandé.

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ en $x = 1$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$ en $x = -1$.
3. $f(x) = \sqrt{2x-5}$ en $x = 4$.
4. $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Aide

Réponses

5 Approximation affine

Cette partie, qui n'est pas la mieux connue par les élèves entrant en terminale, sera pourtant nécessaire cette année dans l'application de la méthode d'Euler, méthode commune aux maths et à la physique.

Déterminer l'approximation affine des fonctions suivantes au point demandé.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en 2.
2. $f(x) = \sin x$ en 0.
3. $f(x) = \tan x$ en 0.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en 0.
5. $f(x) = \sqrt{1+x}$ en 0

Aide

Réponses

II Aide

1 Dérivabilité

Les deux définitions ci-dessous sont équivalentes :

Première version :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, on dit que la fonction f est dérivable en a si la limite lorsque x tend vers a de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

Dans ce cas on écrit : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et ce nombre est appelé nombre dérivé de la fonction f en a.

Deuxième version :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, on dit que la fonction f est dérivable en a si la limite lorsque h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est finie.

Dans ce cas on écrit : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, et ce nombre est appelé nombre dérivé de la fonction f en a.

Remarque : Une étude de dérivabilité revient donc à un calcul de limite. Cette limite est toujours indéterminée au départ.

Retour

2 Calcul : Formulaire de dérivation

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	fonction dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ **ou** $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ **ou** $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

$(uv)' = u'v + uv'$

$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec u ne s'annulant pas.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec v ne s'annulant pas.

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec u strictement positive.

$(u \circ v) = (u' \circ v) \times v'$.

Retour

3 Sens de variation d'une fonction

Une fonction dérivable sur un intervalle I est :

- croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur I.
- décroissante sur I si et seulement si sa dérivée est négative sur I.

Pour revoir les méthodes permettant d'étudier le signe du expression on peut se reporter au chapitre : "Équations, études de signes et inéquations".

Retour

4 Équation de tangente

Pour déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a :

Première méthode :
Je sais que $f(a)$ me donne l'ordonnée du point et que $f'(a)$ me donne le cœfficient directeur de la tangente. Avec ces deux informations je trouve l'équation de la tangente.

Deuxième méthode :
Je connais la formule de l'équation de la tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Il est fortement conseillé, notamment à ceux qui comptent faire des maths après le bac, de connaître cette formule.

Retour

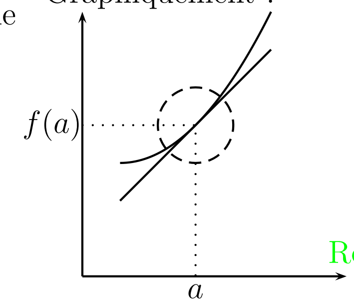
5 Approximation affine

L'idée : Si une fonction f est dérivable en a alors, au voisinage de a, je peux approcher f par une fonction affine.

Soit f une fonction dérivable en a, alors si x est proche de a, on a : $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ce qui peut aussi s'écrire :
$f(x) = f(a) + f'(x)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$,
avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Graphiquement :



Retour

III Correction

1 Dérivabilité

1. Pour la première question, j'utilise les deux versions. Dans la suite j'alterne pour vous permettre de vous habituer.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3} x+3=6\end{aligned}$$
Ou bien :
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 6+h=6\end{aligned}$$
Donc la fonction est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.
2. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
Donc la fonction f est dérivable en 1, et $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.
3. Le domaine de définition est $[0,+\infty[$, donc je calcule la limite en 0 par valeurs supérieures.
$$\begin{aligned}\lim_{h\overset{\geq}{\to}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\overset{\geq}{\to}0}\frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \lim_{h\overset{\geq}{\to}0}\frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{(ici, } h \text{ est positif)}\\ &= +\infty\end{aligned}$$
Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.
4. Je sépare les limites par valeurs supérieures et inférieures, si $x>0$, alors $|x|=x$ et si $x<0$, alors $|x|=-x$.
$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{\leq}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\overset{\leq}{\to}0}\frac{|x|}{x}\\ &= \lim_{x\overset{\leq}{\to}0}\frac{-x}{x}\\ &= -1\end{aligned}$$

et : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{|x|}{x}$
$= \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} \dfrac{x}{x}$
$= 1$

Il y a une limite à gauche et une limite à droite différentes, donc la limite du taux d'accroissement n'existe pas, et la fonction f n'est pas dérivable en 0.

5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\sqrt{h}}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h}$
$= 0$

Donc la fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

6. Le domaine de définition est $[-1; 1]$, donc je calcule la limite en 1 par valeurs inférieures.
$\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{x-1}$
$= \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \sqrt{1-x^2}$
$= 0$

Donc la fonction f est dérivable en 1, et $f'(1) = 0$.

7. Le domaine de définition est $[-1; 1]$, donc je calcule la limite en -1 par valeurs supérieures.
$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{x+1}$
$= \dfrac{(x-1)\sqrt{(1-x)(1+x)}}{\sqrt{(x+1)(x+1)}}$
$= \dfrac{(x-1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$

Or $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} -1} (x-1)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} -1} \sqrt{x+1} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} -1} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

La fonction f n'est pas dérivable en -1.

Remarque à propos des dernières questions : il est écrit dans votre cours de première que la somme, le produit, etc... de fonctions dérivables sont dérivables et c'est exact. Mais on ne peut rien dire de la somme, du produit ... de fonctions non dérivables ou dont certaines ne sont pas dérivables.

Retour

2 Calculs de fonctions dérivées

1. $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$.
2. Je pose $u(x) = 4x - 1$ et $v(x) = 7x + 2$, ce qui donne $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 7$, j'applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, et j'obtiens :
   $f'(x) = \frac{4(7x+2) - (4x-1) \times 7}{(7x+2)^2} = \frac{15}{(7x+2)^2}$.
   Remarque : vous avez le droit d'écrire directement la deuxième ligne.
3. Je pose $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 - 3$, ce qui donne $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$ et j'obtiens :
   $f'(x) = \frac{1(x^2-3) - x \times 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-3}{(x^2-3)^2}$.
4. $f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$.
5. La dérivée de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$, donc $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$.
6. Je pose $u(x) = -2x + 5$, donc $u'(x) = -2$ et j'applique $(\cos u)' = -u' \sin u$, donc $f'(x) = 2\sin(-2x+5)$.
7. Je pose $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$ et j'applique $(\sin u)' = u' \cos u$, donc
   $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.
8. Je pose $u(x) = \sin x$, donc $u'(x) = \cos x$ et j'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = 2$, donc $f'(x) = 2\cos x \sin x$.
   Et puisque je connais quelques formules de trigo : $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.
9. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on a donc :
   $f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
   Remarque : on peut aussi l'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
10. J'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$: $f'(x) = 4 \times 2 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$.
11. J'applique : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, donc $f'(x) = 7 \times \left(-\frac{2x}{(x^2-9)^2}\right) = -\frac{14x}{(x^2-9)^2}$.
12. J'applique $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$.
13. J'applique les deux formules précédentes et : $f'(x) = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} = -\frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.
14. Je pose $u(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, que je dérive : $u'(x) = \frac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$,
    puis j'applique $(u^n)' = nu'u^{n-1}$,
    donc $f'(x) = 3 \times \frac{9}{(x+2)^2} \times \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2 = \frac{27(4x-1)^2}{(x+2)^4}$.

Retour

3 Sens de variation d'une fonction

1. f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x : $f'(x) = x^2 - x - 6$.

   $f'(x)$ est un trinôme du second degré ayant deux racines réelles $-\dfrac{3}{2}$ et 2, donc $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}; 2\right]$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{53}{8}$	$\searrow$	$-\frac{23}{3}$	$\nearrow$	

   Remarque : Pour les valeurs des extrema, il peut être utile de savoir utiliser la commande "fraction" de sa calculatrice.

2. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition.

   Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{1(x+2) - 1(x-5)}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

   Quel que soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}, 7 > 0$ et $(x-2)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ et on a le tableau :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

3. Si nous avions remarqué que la fonction est paire, cela nous aurait simplifié le travail, mais je fais comme si nous ne l'avions pas vu.

   f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

   Pour tout $x \in D_f, f'(x) = 5 \times \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2-1)^2}$.

   Pour tout $x \in D_f$, $(x^2-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-10x$.

   Ce qui donne $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -10x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, et on peut tracer le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Retour

4 Équation de tangente

1. $f'(x) = 4x - 5$, donc $f'(1) = -1$, de plus $f(1) = -2$, donc une équation de la tangente est : $y = -x - 1$.
2. $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$, donc $f'(-1) = 7$ et $f(-1) = -5$, donc une équation de la tangente est : $y = 7x + 2$.
3. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$, donc $f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, et $f(4) = \sqrt{3}$, donc une équation de la tangente est : $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. $f'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, donc une équation de la tangente est : $y = -2x + \dfrac{2\pi}{3}$.

Il est recommandé, une fois l'équation obtenue, de tracer la courbe et la tangente sur la calculatrice.

Retour

5 Approximation affine

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, donc $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $f'(2) = -\dfrac{4}{25}$ et $f(2) = \dfrac{1}{5}$.

   Ce qui donne au voisinage de $x = 2$: $\dfrac{1}{x^2+1} \approx \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{25}(x-2) = -\dfrac{4}{25}x + \dfrac{13}{25}$.
2. $f(x) = \sin x$, donc $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

   Donc au voisinage de 0 : $\sin x \approx x$.

   Remarque : Votre professeur de physique vous dira dans l'année de terminale : « puisque x est petit, je remplace $\sin x$ par x », il effectuera alors une approximation affine.
3. Au voisinage de 0 : $\tan x \approx x$.
4. Au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$.
5. Au voisinage de 0 : $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$.

Retour